İntegral Alma Yöntemleri

Değişken Değiştirme Yöntemi: Bazı integrallerin hesabında değişken dönüşümü kullanmak verilen integralin daha kolay hesaplanabilmesini sağlar.

$$\int f(g(x))\,g'(x)\,dx$$ formundaki bir integrali

hesaplamak için $g(x)=u \Rightarrow g'(x)\,dx=du$ yazılırsa

$$\int f(u)\,du = F(u)+c = F(g(x))+c$$

elde edilir.

❗ UYARI:

İntegrali alınacak fonksiyonun içinde bir ifadenin hem türevi hem de kendisi mevcut ise değişken değiştirme yöntemi kullanılır.

Örnek: $\int e^{\sin x} . \cos x \, dx = ?$

$\sin x = u \Rightarrow \cos x \, dx = du$

$\Rightarrow \int e^{u} du = e^{u} + c = e^{\sin x} + c$ elde edilir

❗ UYARI:

1) Değişken değişimi yapıldığında yazılan yeni integralde eski değişken olmamalıdır. Tüm ifadeler yeni değişken cinsinden yazılmalıdır.

2) Değişken değişimi yapılıp soru çözüldükten sonra ters değişim yapılarak cevap verilen ilk değişken cinsinden yazılmalıdır.

Örnek: $I=\int \frac{\sin(3\ln x)}{x}\,dx = ?$

Çözüm:

$$3\ln x = u \Rightarrow 3.\frac{1}{x}\,dx = du \Rightarrow \frac{1}{x}\,dx = \frac{du}{3}$$

$$I=\int \sin u \cdot \frac{du}{3} = \frac{1}{3}\int \sin u\,du = -\frac{1}{3}\cos u + c$$

$$= -\frac{1}{3}\cos(3\ln x) + c$$

Örnek: $I=\int \frac{e^{2x}+e^{x}}{1+e^{2x}}\, dx = ?$

Çözüm:

$$I=\int \frac{e^{x}(e^{x}+1)}{1+(e^{x})^{2}} \cdot dx \qquad e^{x}=u \Rightarrow e^{x}dx=du$$

$$I=\int \frac{u+1}{1+u^{2}} \cdot du = \int \frac{u}{1+u^{2}}\, du + \int \frac{1}{1+u^{2}}\, du$$

$$1+u^{2}=t \Rightarrow 2u\,du=dt \quad u\,du=\frac{dt}{2}$$

$$=\frac{1}{2}\int \frac{dt}{t} + \int \frac{1}{1+u^{2}}\, du$$

$$I = \frac{1}{2}\ln t + \arctan u + c$$

$$= \frac{1}{2}\ln(1+u^2) + \arctan u + c$$

$$= \frac{1}{2}\ln(1+e^{2x}) + \arctan e^x + c \qquad , \; u = e^x$$

! UYARI: Bazı integrallerde değişken değiştirme direk uygulanamaz. Bu nedenle bu tarz ifadeler önce düzenlenir, sonra uygun konuma gelince değişken değiştirme yapılır.

Örnek: $I = \int \frac{1}{\sqrt{e^{2x}-1}}\,dx = ?$

$$I = \int \frac{1}{e^{x}\sqrt{1-e^{-2x}}}\,dx = \int \frac{e^{-x}\,dx}{\sqrt{1-e^{-2x}}}$$

$$e^{-x} = u \quad \Rightarrow -e^{-x}\,dx = du$$

$$= -\int \frac{du}{\sqrt{1-u^2}} = \arccos u + C$$

$$= \arccos(e^{-x}) + c$$

Örnek! $I = \int \frac{\cos^3 x}{1+\sin x}\, dx = ?$

Çözüm!

$$I = \int \frac{\cos x \cos^2 x}{1+\sin x}\, dx = \int \frac{\cos x\,(1-\sin^2 x)}{1+\sin x}\, dx$$

" $\sin x = u \Rightarrow \cos x\,dx = du$ "

$$= \int \frac{1-u^2}{1+u}\, du = \int \frac{(1-u)\cancel{(1+u)}}{\cancel{1+u}}\, du$$

$$= \int (1-u)\, du = u - \frac{u^2}{2} + c$$

$$= \sin x - \frac{\sin^2 x}{2} + c$$

Örnek: $I = \int \frac{dx}{\sqrt{3-2x-x^2}} = ?$

Çözüm:

$$3-2x-x^2 = 3-(x^2-2x) = 4-(x^2-2x+1) = 4-(x+1)^2$$

$$I = \int \frac{dx}{\sqrt{4-(x+1)^2}} \qquad x+1=u \Rightarrow dx = du$$

$$= \int \frac{du}{\sqrt{4-u^2}} = \int \frac{du}{2\sqrt{1-\left(\frac{u}{2}\right)^2}} \qquad \frac{u}{2}=t \quad \frac{du}{2}=dt$$

$$= \int \frac{\cancel{2}dt}{\cancel{2}\sqrt{1-t^2}} = \arcsin t + c$$

$$= \arcsin \frac{u}{2} + c$$

$$= \arcsin \frac{x+1}{2} + c$$

Örnek: $I = \int x^2 \sqrt{x-2}\, dx = ?$

Çözüm:

$$x-2=t \qquad dx=dt$$
$$x=t+2$$

$$I=\int (t+2)^2\sqrt{t}\,dt = \int (t^2+4t+4)t^{1/2}\,dt$$

$$= \int \left(t^{5/2}+4t^{3/2}+4t^{1/2}\right)dt$$

$$= \frac{2}{7}t^{7/2} + 4\cdot\frac{2}{5}t^{5/2} + 4\cdot\frac{2}{3}\cdot t^{3/2} + c$$

$$= \frac{2}{7}(x-2)^{7/2} + \frac{8}{5}(x-2)^{5/2} + \frac{8}{3}(x-2)^{3/2} + c$$

Kısmi İntegral

u, v , x değişkeninin türevlenebilir (diferansiyellenebilir) iki fonksiyonu olsunlar. Bir çarpımın diferansiyelinden

$$d(u.v) = du.v + dv.u$$

$$\Rightarrow u dv = d(u.v) - v du$$ yazılabilir.

Her iki tarafın integrali alınırsa

$$\int u.dv = u.v - \int v du$$

bulunur.

Eğer $\int v.du$ integralinin hesabı $\int u dv$ integralinin hesabından daha kolay ise bu yöntemi kullanmak oldukça kolaylık sağlar.

! UYARI!

1) Bu yöntemi kullanmak için verilen integralin içi u ve dv diye iki çarpana ayrılmalı ve $\int v\,du$ integrali kolay hesaplanabilen bir integral olmalıdır.

2) Bu yöntem farklı türden fonksiyonlar integrandta çarpım durumunda ise kullanılır.

3) Kendisi integrandta yokken türevi varsa kısmi integral kullanılır.

4) Logaritma ve ters trigonometrik fonksiyonlar integrandta yalnızsa kısmi integral kullanılır. İndirgeme bağıntılarında kullanılır.

5) Kısmi integral uygulanırken u fonksiyonunun seçiminde şu sıralama dikkate alınır.

Logaritma fonks, Arc'lı fonks, Polinom, Trigonometrik, Üstel

Örnek! $I = \int x\sin 2x\,dx = ?$

Çözüm:

$x = u \qquad \sin 2x\,dx = dv$

$dx = du \qquad \int \sin 2x\,dx = \int dv \Rightarrow -\frac{1}{2}\cos 2x = v$

$$I = \int x\sin 2x\,dx = uv - \int v\,du$$

$$= -\frac{1}{2}x\cos 2x + \int \frac{1}{2}\cos 2x\,.dx$$

$$= -\frac{1}{2}x\cos 2x + \frac{1}{4}\sin 2x + c$$

Örnek! $\int \ln x\,dx = ?$

Çözüm! $\ln x = u \Rightarrow \frac{1}{x}dx = du \quad , \quad dx = dv \Rightarrow x = v$

$$\int \ln x\,dx = x\ln x - \int x\cdot\frac{1}{x}dx = x\ln x - x + c$$

Örnek! $I = \int x e^{3x} dx = ?$

Çözüm!

$$x = u \Rightarrow dx = du$$

$$e^{3x} dx = dv \Rightarrow \int e^{3x} dx = \int dv \Rightarrow \frac{1}{3} e^{3x} = v$$

$$I = uv - \int v\,du = \frac{1}{3} x e^{3x} - \frac{1}{3} \int e^{3x} \cdot dx$$

$$= \frac{1}{3} x e^{3x} - \frac{1}{9} e^{3x} + c$$

$$= \frac{1}{9} e^{3x} (3x - 1) + c$$

NOT! Bazı fonksiyonların integralini hesaplamak için kısmi integrasyon yöntemi bir kaç kez uygulamak gerekebilir.

Örneğin;

Örnek: $I=\int x^2 e^{-x}dx=?$

Çözüm:

$$x^2=u \Rightarrow 2x\,dx=du$$

$$e^{-x}dx=dv \Rightarrow \int e^{-x}dx=\int dv \Rightarrow -e^{-x}=V$$

$$\Rightarrow I=u.v-\int v\,du=-x^2e^{-x}+2\underbrace{\int e^{-x}.x\,dx}_{I_1}$$

$$I_1=\int xe^{-x}dx=?$$

$$x=u \quad e^{-x}dx=dv$$

$$dx=du \quad -e^{-x}=V$$

$$I_1=uv-\int v\,du=-xe^{-x}+\int e^{-x}dx=-xe^{-x}-e^{-x}+c$$

$$\Rightarrow I=-x^2e^{-x}+2\left(-xe^{-x}-e^{-x}\right)+c$$

$$I=-e^{-x}\left(x^2+2x+2\right)+c$$

Örnek: $I = \int \arctan x \, dx = ?$

Çözüm:

$$\arctan x = u \Rightarrow \frac{1}{1+x^2} dx = du$$

$$dx = dv \Rightarrow x = v$$

$$I = \int \arctan x \, dx = uv - \int v \, du$$

$$= x \arctan x - \int x \cdot \frac{1}{1+x^2} dx$$

$$= x \arctan x - \frac{1}{2} \int \frac{2x}{1+x^2} dx$$

$$= x \arctan x - \frac{1}{2} \ln(1+x^2) + c$$

Örnek! $I = \int \sec^3 x \, dx = ?$

Çözüm!

$$I = \int \sec^3 x dx = \int \sec x \cdot \sec^2 x \, dx$$

$$\sec x = u \Rightarrow \sec x \tan x \, dx = du$$

$$\sec^2 x dx = dv \Rightarrow \tan x = v$$

$$I = uv - \int v du = \sec x \tan x - \int \tan x \cdot \sec x \tan x \, dx$$

$$= \sec x \tan x - \int \sec x \tan^2 x \, dx$$

$$= \sec x \tan x - \int \sec x (\sec^2 x - 1) dx$$

$$\Rightarrow I = \sec x \tan x - \underbrace{\int \sec^3 x \, dx}_{I} + \int \sec x dx$$

$$// \int \sec x dx = \int \frac{\sec x (\sec x + \tan x)}{\sec x + \tan x} dx = \ln|\sec x + \tan x|$$

$$\Rightarrow I = \frac{\sec x \tan x}{2} + \frac{1}{2} \ln|\sec x + \tan x| + c$$

ÇS

İndirgeme Bağıntıları

Kısmi integrasyon metodu yardımıyla yüksek dereceden bazı ifadelerin integrali daha küçük dereceden bir ifadenin integraline dönüştürülebilir. Bu yolla yüksek dereceli integral kolayca hesaplanabilir.

Örnek: $\forall n \in \mathbb{N}$ için $I_n = \int \cos^n x \, dx$ integrali için bir indirgeme bağıntısını bulunuz.

Çözüm:

$$I_n = \int \cos^n x \, dx = \int \cos^{n-1} x \cos x \, dx$$

$\cos^{n-1} x = u$, $\cos x \, dx = dv$

$-(n-1)\cos^{(n-2)} x \sin x \, dx = du$, $\sin x = v$

$$I_n = \sin x \cos^{n-1} x + (n-1)\int \sin^2 x \cdot \cos^{n-2} x \, dx$$
$$= \sin x \cos^{n-1} x + (n-1)\int (1-\cos^2 x)\cos^{n-2} x \, dx$$

$$I_n = \sin x \cos^{n-1} x + (n-1)\int \cos^{n-2} x \, dx - (n-1)\underbrace{\int \cos^n x \, dx}_{I_n}$$

$$(1+(n-1)) I_n = \sin x \cos^{n-1} x + (n-1)\int \cos^{n-2} x \, dx$$

$$n I_n = \sin x \cos^{n-1} x + (n-1)\int \cos^{n-2} dx$$
$$I_n = \frac{1}{n}\sin x \cos^{n-1} x + \frac{n-1}{n}\int \cos^{n-2} dx$$

indirgeme bağıntısı elde edilir.

$n=5$ için $\int \cos^5 x \, dx$ i hesaplayalım.

$$\int \cos^5 x \, dx = \frac{1}{5}\sin x \cos^4 x + \frac{4}{15}\cos^2 x \sin x + \frac{8}{15}\sin x + c$$

bulunur.

Örnek! $I_n = \int (\ln x)^n dx = ?$ $n \in \mathbb{N}$

Çözüm:

$(\ln x)^n = u \Rightarrow \dfrac{n(\ln x)^{n-1}}{x} dx = du$

$dx = dv \Rightarrow x = v$

$$I_n = x(\ln x)^n - \int x \cdot \frac{n(\ln x)^{n-1}}{x} dx$$

$I_n = x(\ln x)^n - n I_{n-1}$ indirgeme bağıntısı bulunur.

Örneğin;

$$\int \ln^3 x dx = x(\ln x)^3 - 3\int (\ln x)^2 dx$$
$$= x(\ln x)^3 - 3\left[x(\ln x)^2 - 2\int \ln x dx\right] + c$$
$$= x(\ln x)^3 - 3x(\ln x)^2 + 6(x\ln x - x) + c$$